Attenzione:
Il seguente file comprende:
1) tutte le risposte delle crocette
2) Tutte le dimostrazioni dell'ottimo file "syllabus.pdf" presente già su Mega (e correzioni/precisazioni dello stesso)
3) Ampliamenti alle risposte e completamenti dove mancanti alle dim. irrinunciabili e domande similari
4) Domande fuori dal syllabus chieste almeno una volta in esami
5) Domande fuori dal syllabus non chieste ma presenti a titolo di cautela

Credo sia uno strumento unico ed utile, forse il file definitivo per calcolo.

TEST A RISPOSTA MULTIPLA

Indicare TUTTE le affermazioni corrette

Risposte tipo: 1AD - 2A - 3BC
(ci possono essere più risposte corrette)

1) Il polinomio interpolatore di $f(x) = x^2 + bx + c$ su 20 nodi distinti:

A) ha grado 3

B) ha grado 20

C) ha grado 2

D) ha grado 19

2) La somma algebrica di numeri approssimati:

A) è sempre instabile

B) è stabile quando i numeri hanno segno opposto

C) è instabile quando i numeri hanno lo stesso segno

D) può essere instabile quando i numeri hanno segno opposto

3) Il metodo di Newton (tangenti) quando converge:

A) ha sempre convergenza quadratica

B) ha sempre convergenza lineare

C) può avere convergenza lineare

D) può avere convergenza cubica

TEST A RISPOSTA MULTIPLA

Indicare TUTTE le affermazioni corrette

Risposte tipo: 1AD - 2A - 3BC
(ci possono essere più risposte corrette)

1) La moltiplicazione tra numeri approssimati:

A) **è sempre instabile**

B) **è instabile quando i numeri hanno lo stesso segno**

C) **è sempre stabile**

D) **è instabile quando i numeri hanno segno opposto**

2) L'interpolazione cubica a tratti a passo costante h:

A) **converge uniformemente con errore** $O(h^4)$ **per** $f \in C^5[a,b]$

B) **non converge uniformemente se** $f \in C^k[a,b]$ **con** $k < 5$

C) **converge uniformemente con errore** $O(h^5)$ **per** $f \in C^3[a,b]$

D) **converge uniformemente con errore** $O(h^4)$ **per** $f \in C^2[a,b]$

3) La precisione di macchina in un sistema floating-point $F(b,t,L,U)$ è:

dove b è base, t è una serie di cifre di mantissa,
e l'esponente è compreso tra L ed U

A) **il più piccolo reale-macchina positivo**

B) $b^{L-t}/2$

C) **il massimo errore relativo di arrotondamento a t cifre di mantissa**

D) b^{L-U}

TEST A RISPOSTA MULTIPLA

Indicare TUTTE le affermazioni corrette

Risposte tipo: 1AD - 2A - 3BC
(ci possono essere più risposte corrette)

1) La formula di derivazione numerica col rapporto incrementale simmetrico $\delta(h)$ per $f \in C^5$ ha un errore teorico:

A) $O(h^4)$

B) $O(h^3)$

C) $O(h^2)$

D) $O(h^5)$

2) Il costo computazionale del Metodo di Eliminazione Gaussiana applicato a una matrice invertibile é:

A) $\sim 5n^3/4$

B) $O(n^3)$

C) $O(n^2)$

D) $\sim 2n^3/3$

3) Il metodo di Newton (tangenti) quando converge:

A) può avere convergenza lineare

B) ha sempre convergenza lineare

C) può avere convergenza quadratica

D) ha sempre convergenza quadratica

TEST A RISPOSTA MULTIPLA

Indicare TUTTE le affermazioni corrette

Risposte tipo: 1AD - 2A - 3BC
(ci possono essere più risposte corrette)

1) Il prodotto di numeri approssimati:

A) è sempre stabile

B) è instabile quando i numeri hanno segno opposto

C) è sempre instabile

D) è instabile quando i numeri hanno lo stesso segno

2) L'interpolazione lineare a tratti a passo costante

A) converge uniformemente con errore $O(h^4)$ per $f \in C^5[a,b]$

B) non converge uniformemente se $f \in C^k[a,b]$ con $k < 4$

C) converge uniformemente con errore $O(h^2)$ per $f \in C^2[a,b]$

D) converge uniformemente con errore $O(h^2)$ per $f \in C^3[a,b]$

3) Il polinomio interpolatore di $f(x) = x^3 + bx + c$ su 29 nodi distinti:

A) ha grado 30

B) ha grado 3

C) ha grado ≤ 28

D) ha grado 4

TEST A RISPOSTA MULTIPLA

Indicare TUTTE le affermazioni corrette

Risposte tipo: 1AD - 2A - 3BC
(ci possono essere più risposte corrette)

1) In un sistema floating-point $F(b, t, L, U)$ il più piccolo reale-macchina positivo è:

A) **la precisione di macchina**

B) b^{-U}

C) b^{L-1}

D) b^{L-U}

2) Il costo computazionale del Metodo di Eliminazione Gaussiana applicato a una matrice invertibile é:

A) $\sim 2n^4/3$

B) $\sim 2n^3/3$

C) $O(n^2)$

D) $\sim n^3$

3) L'interpolazione spline cubica a passo costante h per $f \in C^4[a, b]$ ha un errore:

A) $O(h^5)$ **su** f

B) $O(h^3)$ **su** f'

C) $O(h^3)$ **su** f''

D) $O(h^4)$ **su** f

TEST A RISPOSTA MULTIPLA

Indicare TUTTE le affermazioni corrette

Risposte tipo: 1AD - 2A - 3BC
(ci possono essere più risposte corrette)

1) La divisione tra numeri approssimati:

A) è sempre stabile

B) può essere instabile

C) è instabile se i numeri hanno segno opposto

D) è stabile se i numeri hanno lo stesso segno

2) L'interpolazione spline cubica a passo costante:

A) converge uniformemente con errore $O(h^5)$ per $f \in C^5[a,b]$

B) converge uniformemente con errore $O(h^4)$ per $f \in C^4[a,b]$

C) converge uniformemente con errore $O(h^4)$ per $f \in C^6[a,b]$

D) non converge mai uniformemente

3) In un sostema floating-point $F(b,t,L,U)$ il più piccolo reale-macchina positivo è:

A) b^{L-U}

B) $b^{1-t}/2$

C) b^{-U}

D) b^{L-1}

TEST A RISPOSTA MULTIPLA

Indicare TUTTE le affermazioni corrette

Risposte tipo: 1AD - 2A - 3BC
(ci possono essere più risposte corrette)

1) La divisione tra numeri approssimati:

- **A) è sempre stabile**
- **B) è instabile quando i numeri hanno lo stesso segno**
- **C) può essere instabile quando i numeri hanno segno opposto**
- **D) è sempre instabile**

2) L'interpolazione quadratica a tratti a passo costante

- **A) converge uniformemente con errore** $O(h^4)$ **per** $f \in C^5[a,b]$
- **B) non converge uniformemente se** $f \in C^k[a,b]$ **con** $k < 6$
- **C) converge uniformemente con errore** $O(h^3)$ **per** $f \in C^5[a,b]$
- **D) converge uniformemente con errore** $O(h^3)$ **per** $f \in C^3[a,b]$

3) La precisione di macchina in un sistema floating-point $F(b,t,L,U)$ **è:**

- **A) il più piccolo reale-macchina positivo**
- **B)** $b^{1-t}/2$
- **C) il minimo reale-macchina positivo che sommato ad 1 dà un risultato** > 1
- **D)** b^{L-1}

TEST A RISPOSTA MULTIPLA

Indicare TUTTE le affermazioni corrette

Risposte tipo: 1AD - 2A - 3BC
(ci possono essere più risposte corrette)

1) L'indice di condizionamento di una matrice invertibile $A \in \mathbf{R^{n\times n}}$ è:

A) $det(A)$

B) **l'autovalore di modulo massimo di** A

C) **l'autovalore di modulo minimo di** A

D) $\|A\|\,\|A^{-1}\|$

2) Il costo computazionale del Metodo di Eliminazione Gaussiana applicato a una matrice invertibile é:

A) $O(n^3)$

B) $\sim n^3$

C) $O(n^2)$

D) $\sim n^4$

3) Le iterazioni di punto fisso per una contrazione:

A) **hanno sempre convergenza quadratica**

B) **possono avere convergenza quadratica**

C) **possono non convergere**

D) **hanno sempre convergenza almeno lineare**

Risponde alla domanda:
Che cos'è la precisione di macchina in un sistema floating-point F(b, t, L,U) e come si calcola? (si ricavi il valore)

1 Precisione di macchina come max errore relativo di arrotondamento nel sistema floating-point

Definiamo arrotondamento a t cifre di un numero reale scritto in notazione floating-point

$$x = sign(x)(0, d_1 d_2 \dots d_t \dots) \cdot b^p$$

il numero

$$fl^t(x) = sign(x)(0, d_1 d_2 \dots \tilde{d}_t) \cdot b^p$$

sign = funzione segno (ossia la funzione che fa corrispondere a tutti i numeri negativi il valore –1, allo zero il valore 0 e a tutti i numeri positivi il valore 1)

dove la mantissa è stata arrotondata alla t-esima cifra

$$\tilde{d}_t = \begin{cases} d_t & \text{se } d_{(t+1)} < \frac{b}{2} \\ d_t + 1 & \text{se } d_{(t+1)} \geq \frac{b}{2} \end{cases}$$

Definiamo:

$$\text{Errore Relativo} \longleftarrow \frac{\overbrace{|\, x - fl^t(x) \,|}^{\text{Errore Assoluto}}}{|\, x \,|} \quad \text{per} \quad x \neq 0$$

Stimiamo il numeratore

$$\begin{aligned} |\, x - fl^t(x) \,| &= b^p \cdot \overbrace{|(0, d_1 d_2 \dots d_t \dots) - (0, d_1 d_2 \dots \tilde{d}_t)|}^{\text{Errore di arrotondamento a } t \text{ cifre dopo la virgola} \leq \frac{b^{-t}}{2}} \\ &\leq b^p \cdot \frac{b^{-t}}{2} = \frac{b^{p-t}}{2} \end{aligned}$$

Notiamo subito un aspetto: l'errore dipende da p, cioè dall'ordine di grandezza del numero (in base b).
Stimiamo da sopra $\frac{1}{|\, x \,|}$, ovvero da sotto $|\, x \,|$:

$$|\, x \,| = (0, d_1 d_2 \dots d_t \dots) \cdot b^p$$

Poiché $d_1 \neq 0$, p fissato, il minimo valore della mantissa è $0, 100 \dots = b^{-1}$. Quindi:

$$|\, x \,| \geq b^{-1} \cdot b^p = b^{p-1} \iff \frac{1}{|\, x \,|} \leq \frac{1}{b^{p-1}}$$

Otteniamo

$$\frac{|\, x - fl^t(x) \,|}{|\, x \,|} \leq \frac{\frac{b^{p-t}}{2}}{b^{p-1}} = \frac{b^{p-t+1-p}}{2} = \frac{b^{1-t}}{2} = \varepsilon_M$$

Appunto di conclusione: nel sistema FP a 64-bit, la prec. di macchina è pari a 2^(-53)

2 Analisi di stabilità di moltiplicazione, divisione, addizione e sottrazione con numeri approssimati

2.1 Moltiplicazione Risponde alla domanda: Stabilità della moltiplicazione

$$\varepsilon_{xy} = \frac{|\, xy - \tilde{x}\tilde{y} \,|}{|\, xy \,|}, \quad x, y \neq 0$$

Usiamo la stessa tecnica che si usa per dimostrare che il limite del prodotto di due successioni o funzioni è il prodotto dei limiti, aggiungendo e togliendo a numeratore ad esempio $\tilde{x}y$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xy} &= \frac{|\, xy - \tilde{x}y + \tilde{x}y - \tilde{x}\tilde{y} \,|}{|\, y \,|} \\
&= \frac{|\, \overbrace{y(x-\tilde{x})}^{=a} + \overbrace{\tilde{x}(y-\tilde{y})}^{=b} \,|}{|\, xy \,|} \\
&\leq \frac{|\, y(x-\tilde{x})| + |\tilde{x}(y-\tilde{y}) \,|}{|\, xy \,|} \qquad (*)
\end{aligned}$$

$(*)$ Disugliaglianza triangolare: $||\, a \,| - |\, b \,|| \leq |\, a + b \,| \leq |\, a \,| + |\, b \,|$

Quindi otteniamo

$$\varepsilon_{xy} \leq \frac{|\, y \,||\, x - \tilde{x} \,|}{|\, xy \,|} + \frac{|\, \tilde{x} \,||\, y - \tilde{y} \,|}{|\, xy \,|} = \varepsilon_x + \frac{|\, \tilde{x} \,|}{|\, x \,|}\varepsilon_y$$

Questo perché $\frac{|\, x - \tilde{x} \,|}{|\, x \,|} = \varepsilon_x$ e $\frac{|\, y - \tilde{y} \,|}{|\, y \,|} = \varepsilon_y$.
Poiché $\tilde{x} \approx x \Rightarrow \frac{|\, \tilde{x} \,|}{|\, x \,|} \approx 1$ e possiamo quindi dire che la moltiplicazione è STABILE.

$$\varepsilon_{xy} \lesssim \varepsilon_x + \varepsilon_y$$

Però possiamo dare una stima più precisa di $\frac{|\, \tilde{x} \,|}{|\, x \,|}$

$$\frac{|\, \tilde{x} \,|}{|\, x \,|} = \underbrace{\frac{|\, \overbrace{x}^{=a} + \overbrace{\tilde{x} - x}^{=b} \,|}{|\, x \,|} \leq \frac{|\, x \,| + |\, \tilde{x} - x \,|}{|\, x \,|}}_{\text{Disuguaglianza Triangolare}} = 1 + \varepsilon_x$$

e quindi

$$\varepsilon_{xy} \leq \varepsilon_x + (1 + \varepsilon_x)\,\varepsilon_y$$

Solitamente $\varepsilon_x \leq \varepsilon_M \approx 10^{-16} \Rightarrow 1 + \varepsilon_x$ è vicinissimo ad 1. Ma anche se $\varepsilon_x = 1$ (errore del 100%, molto grande) $\Rightarrow (1 + \varepsilon_x) = 2$ e la stabilità della moltiplicazione non cambia.

2.2 Divisione Risponde alla domanda: Stabilità della divisione

La divisione è la moltiplicazione per il reciproco $\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}$.
Analizzando quindi l'operazione di reciproco

$$\varepsilon_{\frac{1}{y}} = \frac{\left|\, \frac{1}{y} - \frac{1}{\tilde{y}} \,\right|}{\left|\, \frac{1}{y} \,\right|} = \frac{\frac{|\, \tilde{y} - y \,|}{|\, \tilde{y}y \,|}}{\left|\, \frac{1}{y} \,\right|} = \frac{|\, \tilde{y} - y \,|}{|\, y \,|} \cdot \frac{|\, y \,|}{|\, \tilde{y} \,|} \approx \varepsilon_y \qquad \left(\text{questo perché } \frac{|\, \tilde{y} - y \,|}{|\, y \,|} = \varepsilon_y.\right)$$

Poiché $\frac{|y|}{|\tilde{y}|} \approx 1$ possiamo dedurre che il reciproco, e possiamo quindi la divisione, è STABILE.
Però possiamo dare una stima più precisa di $\frac{|y|}{|\tilde{y}|}$

$$|\tilde{y}| = |y + \tilde{y} - y| = |y|\left|1 + \frac{(\tilde{y} - y)}{y}\right|$$

usando la stima da sotto nella disuguaglianza triangolare

$$|a + b| \geq ||a| - |b||$$

$a = 1$ e $b = \frac{(\tilde{y}-y)}{y}$

$$\left|1 + \frac{(\tilde{y} - y)}{y}\right| \geq \left|1 - \frac{|\tilde{y} - y|}{|y|}\right| = |1 - \varepsilon_y| = 1 - \varepsilon_y \qquad \big(\text{perchè } \varepsilon_y < 1\big)$$

da cui si ottiene

$$|\tilde{y}| \geq |y|(1 - \varepsilon_y)$$

e quindi

$$\frac{|y|}{|\tilde{y}|} \leq \frac{|y|}{|y|(1 - \varepsilon_y)} = \frac{1 + \varepsilon_y}{(1 + \varepsilon_y)(1 - \varepsilon_y)} = \underbrace{\frac{1 + \varepsilon_y}{1 - \varepsilon_y^2} \approx 1 + \varepsilon_y}_{\text{Poiché } \varepsilon_y^2 \ll \varepsilon_y < 1}$$

Quindi

$$\varepsilon_{\frac{1}{y}} = \varepsilon_y \frac{|y|}{|\tilde{y}|} \lesssim \varepsilon_y(1 + \varepsilon_y) \approx \varepsilon_y \Rightarrow \varepsilon_{\frac{1}{y}} \lesssim \varepsilon_y$$

Infine abbiamo che per la divisione vale (usando la stima della moltiplicazione)

$$\varepsilon_{\frac{x}{y}} \lesssim \varepsilon_x + \varepsilon_y$$

2.3 Somma Algebrica

Risponde alle domande:
Stabilità dell'addizione
Instabilità della sottrazione (ed esempio).
Negli appunti ce ne stanno 4 di esempi di instabilità della sottrazione: qui si ha il più easy.

$$x + y = \begin{cases} ADDIZIONE & \text{se } sign(x) = sign(y) \\ SOTTRAZIONE & \text{se } sign(x) \neq sign(y) \end{cases}$$

Per la somma algebrica vale:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{x+y} &= \frac{|(x + y) - (\tilde{x} + \tilde{y})|}{|x + y|}, \quad x + y \neq 0 \\
&= \frac{|x - \tilde{x} + y - \tilde{y}|}{|x + y|}, \quad a = x - \tilde{x} \text{ e } b = y - \tilde{y} \\
&\leq \frac{|x - \tilde{x}|}{|x + y|} + \frac{|y - \tilde{y}|}{|x + y|}, \quad \text{DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE} \\
&= \frac{|x|}{|x + y|} \cdot \frac{|x - \tilde{x}|}{|x|} + \frac{|y|}{|x + y|} \cdot \frac{|y - \tilde{y}|}{|y|} \\
&= w_1\varepsilon_x + w_2\varepsilon_y \quad \text{con } w_1 = \frac{|x|}{|x + y|}, \, w_2 = \frac{|y|}{|x + y|}
\end{aligned}$$

Addizione $sign(x) = sign(y)$
In questo caso $|x + y| \geq |x|, |y| \Rightarrow w_1, w_2 \leq 1$. Quindi l'addizione è stabile $\varepsilon_{x+y} \lesssim \varepsilon_x + \varepsilon_y$

1.5.1 Esempio 1

Consideriamo $\mathbb{F}(10, 4, L, U)$ (con L, U sufficienti per rappresentare i numeri che ci interessano) e

$$x = 0,10016$$

$$y = -0,10012$$

allora

$$\tilde{x} = fl^4(x) = 0,1002$$
$$\tilde{y} = fl^4(y) = -0,1001$$

eseguendo l'operazione-macchina di somma algebrica (che è una sottrazione visto che x e y hanno segno opposto) si ottiene

$$\begin{aligned} x \oplus y &= fl^4(fl^4(x) + fl^4(y)) \\ &= fl^4(0,1002 - 0,1001) \\ &= 10^{-4} \end{aligned}$$

scriveremo spesso i numeri in notazione standard per comodità)
Invece

$$x + y = 4 \cdot 10^{-5}$$

quindi l'errore relativo nel risultato è

$$\frac{|\,(x+y) - (x+y)\,|}{|\,x+y\,|} = \frac{|\,4 \cdot 10^{-5} - 10^{-4}\,|}{4 \cdot 10^{-5}} = \frac{6 \cdot 10^{-5}}{4 \cdot 10^{-5}} = \frac{3}{2} = 150\%$$

Da inserire la considerazione sui pesi (tralasciando quando sotto scrive “ci apre la strada per l’analisi del prossimo esempio”:

Abbiamo un errore del 150% e una perdita di precisione di ben tre ordini di grandezza rispetto alla precisione di macchina.

Qui il problema sta nella sottrazione tra numeri vicini, visto che $x + y = 4 \cdot 10^{-5}$ ma $|x|,|y| \approx 10^{-1}$

Infatti se calcoliamo i pesi $w_1 = \dfrac{|x|}{|x+y|} \simeq \dfrac{10^{-1}}{4 \cdot 10^{-5}} = \dfrac{10^4}{4} = 2500$

e analogamente $w_2 \approx 2500$
Questi fattori di amplificazione degli errori sui dati sono dell’ordine di 10^3 e spiegano come si arrivi ad un errore finale>100%, che rende inaccettabile in pratica il risultato in questo caso i fattori di amplificazione non sono enormi, ma sono comunque $> 1/\varepsilon_M$ osserviamo che bastava una 1 cifra di mantissa in più per avere il risultato esatto, perchè con t=5 non ci sarebbe stato bisogno di arrotondare x e y e quindi $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$ questo ci apre la strada all’analisi del prossimo esempio, un po’ più sofisticato.

Sottrazione $sign(x) \neq sign(y)$
In questo caso $|\,x+y\,| \leq |\,x\,|$ e/o $|\,x+y\,| \leq |\,y\,| \Rightarrow max\{w_1\,,w_2\} > 1$. Quindi la sottrazione è potenzialmente instabile (se $w_1\,,w_2$ troppo grandi).
Nel caso in cui $|\,x\,|\,,|\,y\,|$ siano molto vicini in termini relativi, si ha

$$|\,x+y\,| \ll |\,x\,|\,,|\,y\,| \;\Rightarrow\; w_1\,,w_2 \gg 1$$

3 Convergenza del metodo di bisezione

Risponde alla domanda omonima

Il metodo di bisezione si basa sull'applicazione iterativa del Teorema degli zeri di funzioni continue:
Se $f(x) \in C[a,b]$ e $f(a)f(b) < 0$ (cioè f cambia segno) allora

$$\exists \xi : f(\xi) = 0,\;\; \xi \in (a,b)$$

Il procedimento consiste nel passare da $[a_n, b_n] \;\rightarrow\; [a_{n+1}, b_{n+1}]$ in cui uno degli estremi è diventato il punto medio

$$x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

A meno che per qualche n non risulti $f(x_n) = 0$, si tratta di un processo infinito che ci permette di costruire tre successioni $\{a_n\}\,,\{b_n\}\,,\{x_n\}$ tali che:

- $|\xi - a_n|,\;\; |\xi - b_n| \leq b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$
- $|\xi - x_n| < \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}}$

È semplice dimostrare che tutte e tre le successioni convergono ad uno zero $\xi \in (a,b)$

- $0 \leq |\,\xi - a_n\,|,\;\; |\,\xi - b_n\,| < \frac{b-a}{2^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \underset{\text{Teor. Carabinieri}}{\Longrightarrow} |\,\xi - a_n\,|,\;\; |\,\xi - b_n\,| \longrightarrow 0,\;\; n \rightarrow \infty$
- $0 \leq |\,\xi - x_n\,| < \frac{b-a}{2^{n+1}} \Longrightarrow |\,\xi - x_n\,| \longrightarrow 0,\;\; n \rightarrow \infty$

Sappiamo che "csi" zero di f sta nell'intorno aperto di centro x_n e raggio (b_n - a_n)/2.
Nel metodo di bisezione si sceglie x_n come successione di approssimazioni, visto che la stima dell'errore è migliore di un fattore 1/2 rispetto a quella di a_n e b_n.

Risponde alle domande:
Stima residuo pesato bisezione
oppure
Perché il residuo pesato per la bisezione non è una buona stima? (per questo secondo pezzo servono i disegni)

4 Stima dell'errore con residuo pesato (metodo bisezione)

Vogliamo stimare l'errore di bisezione, applicato nelle seguenti ipotesi:

$$\left.\begin{array}{l} f \in C^1[a,b] \\ \{x_n\} \in [c,d] \subseteq [a,b] \\ f'(x) \neq 0\,,\ \forall x \in [c,d] \end{array}\right\} \Rightarrow e_n = |x_n - \xi| = \frac{|f(x_n)|}{|f'(z_n)|}\,,\quad n \geq n_0\,,\quad z_n \in \begin{cases} (x_n, \xi) \\ (\xi, x_n) \end{cases}$$

C^1 indica derivabile 1 volta con derivata continua.

Dimostriamolo utilizzando il teorema del valor medio

$$\text{Sia } f \in C[a,b] \text{ derivabile in } [a.b] \Rightarrow \exists z \in [a,b] : \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(z)$$

Consideriamo il caso $\xi < x_n$ (se $x_n < \xi$ la dimostrazione è analoga)

$$f(x_n) - f(\xi) = f'(z_n)(x_n - \xi),\ z_n \in (\xi, x_n)$$

con $f(\xi) = 0$, cioè

$$|f(x_n)| = |f'(z_n)||x_n - \xi|$$

che si può riscrivere come

$$e_n = |x_n - \xi| = \frac{|f(x_n)|}{|f'(\cancel{z_n})|}$$

f' (x_n)

Per l'errore, si confronti pag. 33, lezione 8 PDF del prof. Il rapporto che vogliamo stabilizzare ad 1 è quello tra f' (x_n) e f'(x_n-1).

Questa è una "stima empirica", che verifica che l'ordine di grandezza della derivata si stabilizzi.

Tecnicamente non è un errore perché:

|f' (x_n)| circa |f' (z_n)|

è dichiarato ma aiuta a mettere in evidenza il fatto che vogliamo stabilizzare il detto rapporto

Osserviamo che:

- e_n è un "residuo pesato"
- $f'(x) \neq 0 \Rightarrow$ zero è semplice
- e_n è una stima a posteriori (serve aver calcolato x_n)

Siccome non conosciamo z_n, diamo delle stime pratiche dell'errore:

- Se è noto che $|f'(x)| \geq k > 0 \Rightarrow e_n = \frac{|f(x_n)|}{|f'(z_n)|} \leq \frac{|f(x_n)|}{k}$
- Se f' è nota, per n abbastanza grande si ha (grazie al teorema dei carabinieri e per continuità di f')

$$\underbrace{f'(x_n) \approx f'(z_n)}_{\approx f'(\xi)} \Longrightarrow e_n \approx \frac{|f(x_n)|}{|f'(z_n)|}$$

- Se f' non è nota, si può approssimare con un rapporto incrementale delle quantità calcolate, di nuovo ottenendo una sorta di stima empirica

$$f'(z_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}\,,\quad \text{per } n \text{ abbastanza grande}$$

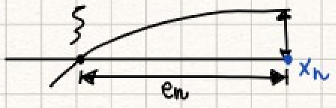
Detto k_n il peso calcolato con uno degli approcci (1) e (3), siamo allora in gradi di scrivere un test di arresto che combina stima a priori e a posteriori:

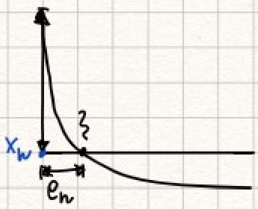
min {b-a/(2^(n+1), |f(x_n)|/k_N} <= epsilon

Perché il residuo non pesato può non essere una buona stima errore?

In generale, non è vero che $|f(x_n)| \le \varepsilon \Rightarrow e_n \le \varepsilon$. Per avere una buona stima dell'errore a posteriori bisogna pesare il residuo alla derivata.

Per capire il motivo, si considerino i seguenti grafici con $|f(x)|$ = RESIDUO





Il primo è un caso di sottostima (residuo piccolo, errore grande)

Il secondo è un caso di sovrastima (residuo grande, errore piccolo)

In particolare, il caso più pericoloso dei due è la sottostima, dato che potrebbe portare allo stop delle iterazioni prima di trovare un valore che rispetti i limiti di tolleranza, mentre la sovrastima comporta solamente di effettuare più iterazioni del necessario, affinando il risultato al valore effettivamente cercato.

Risponde alla domanda:
Si dimostri la convergenza del metodo di Newton nel caso strettamente convesso o concavo

5 Convergenza globale del metodo di Newton ("delle tangenti") in ipotesi di convessità/concavità stretta

Metodo di Newton: Linearizzare iterativamente la funzione con la tangente nel punto

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

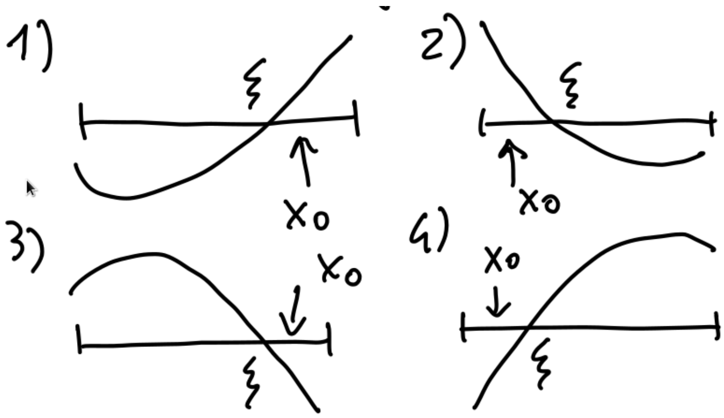
Convergenza metodo di Newton:

$$\begin{cases} f \in C^2[a,b] \\ f(a)f(b) < 0 \\ f''(x) > 0 \quad \forall x \in [a,b] \\ x_0 : f(x_0)f''(x_0) > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Il metodo di Newton è ben defin}\text{to (cioè } f'(x_n) \neq 0)$$

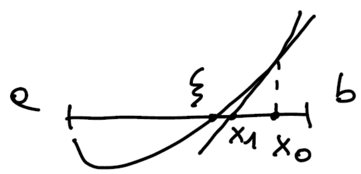
e converge all'unico zero ξ di f in $[a,b]$

Dimostrazione
ci sono 4 casi possibili in base al segno di f'' ovvero

Avendo che:
in (1) e (2) f è strettamente convessa,
in (3) e (4) concava,
in (1) e (3) x0 va scelto in (csi, b],
in (2) e (4) x0 va scelto in [a, csi).



In questa dimostrazione di concentriamo sul caso 1)
(in cui l'ipotesi chiave è che non cambi segno f''; comprende anche quando f' non cambia segno)



- $f(a) < 0\,,\ f(b) > 0$
- $f''(x) > 0\ \ \forall x \in [a,b]$
- $x_0 \in [a,b]$

Dimostriamo come prima cosa: $x_n \in (\xi, b] \Rightarrow x_{n+1} \in (\xi, b]$

f è esattamente convessa $\Rightarrow$ La tangente sta "sotto al grafico" $\forall x \in [a,b]$
$\Rightarrow$ La tangente in un punto $\in (\xi, b]$ interseca l'asse x "a destra" di ξ

Dimostriamo quindi: $x_{n+1} < x_n$ (cioè $\{x_n\}$ è decrescente)

$$x_{n+1} = x_n - \left.\tfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right\} > 0$$

Poiché per $x_n \in (\xi, b]$ si ha $f(x_n) > 0$. Inoltre $f'(x_n) > 0$ in $(\xi, b]$ altrimenti per avere uno zero f'' in $(\xi, b]$ dovrebbe cambiare segno.
Abbiamo quindi che $\{x_n\}$ è una successione decrescente, con $x_n > \xi \quad \forall n$.
Allora

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = inf\{x_n\} = \eta \quad \text{con} \quad \eta \geq \xi$$ (monotonia della successione da Analisi)

Infine (passando al limite della formula e usando proprietà dei limiti e continuità di f ed f')

$$\begin{aligned}
\eta = \lim x_{n+1} &= \lim \left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right) \\
&= \lim x_n - \lim \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\
&= \lim x_n - \frac{\lim f(x_n)}{\lim f'(x_n)} \\
&= \lim x_n - \frac{f(\lim x_n)}{f'(\lim x_n)} \leftarrow \quad \lim x_n = \eta \\
&= \eta - \frac{f(\eta)}{f'(\eta)}
\end{aligned}$$

Quindi

$$\eta = \eta - \frac{f(\eta)}{f'(\eta)} \quad \text{con } f'(\eta) \neq 0 \Rightarrow \frac{f(\eta)}{f'(\eta)} = 0 \Rightarrow f(\eta) = 0 \Rightarrow \eta = \xi$$

Ciò conclude che il Metodo di Newton è ben definito ed {x_n} converge a csi.

La velocità di convergenza del metodo di Newton è usata solo per questa risposta; qui è espansa nel modo corretto.

Perché il metodo di Newton per zeri semplici ha ordine di convergenza almeno 2? Quando ha ordine esattamente 2? (si dimostri la relazione fondamentale che lega e_{n+1} e_n).

Sia

$$\begin{cases} f \in C^2[a,b] \\ \xi \in [a,b] : f(\xi) = 0 \\ \{x_n\} \subset [c,d] \subseteq [a,b] \\ f'(x) \neq 0 \ \forall x \in [c,d] \end{cases} \Rightarrow e_{n+1} \le c\, e_n^2, \quad n \ge 0, \quad c = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_2}{m_1}$$

$$\text{con } M_2 = \max_{x \in [c,d]} |\, f''(x)\,|, \quad m_1 = \min_{x \in [c,d]} |\, f'(x)\,| > 0$$

Applichiamo la formula di Taylor centrata in x_n e calcolata in ξ , con resto del II ordine in forma di Lagrange

$$\underbrace{f(\xi)}_{=0} = f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n) + \frac{f''(z_n)}{2}(\xi - x_n)^2 \quad z_n \in int(x_n, \xi) \subset [c,d]$$

int = intervallo

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}_{=x_{n+1}-x_n} = \xi - x_n + \frac{f''(z_n)}{2f'(x_n)}(\xi - x_n)^2$$

$$\Downarrow$$

$$x_{n+1} = \xi + \frac{f''(z_n)}{2 \cdot f'(x_n)}(\xi - x_n)^2$$

$$\overset{aggiungendo\, i\, moduli}{\Downarrow}$$

$$e_{n+1} = |x_{n+1} - \xi| = c_n e_n^2 \quad \text{con} \quad c_n = \frac{1}{2}\frac{|f''(z_n)|}{|f'(x_n)|}$$

Rispondendo alle domande:

- Il metodo di Newton ha convergenza esattamente 2 quando: $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^2} = L' \neq 0$

$e_{n+1} = \frac{1}{2}\frac{|f''(z_n)|}{|f'(x_n)|}$ e quindi: $\lim \frac{e_{n+1}}{e_n^2} = \frac{1}{2}\frac{|f''(\xi)|}{|f'(\xi)|}$ con $f''(\xi) \neq 0$ ed $f'(\xi) = 0$

- Il metodo di Newton ha convergenza almeno 2 quando: $e_{n+1} \le c e_n^2$ cioè $f'(\xi) = 0$ ed $\exists f''(\xi)$

Risponde alla domanda omonima.

7 Ordine di convergenza delle iterazioni di punto fisso

Sia ξ punto fisso di $\phi \in C(I)$ e I è un intervallo chiuso (non necessariamente limitato) di $\mathbb{R}$. Supponiamo di essere nelle ipotesi in cui:

$$x_{n+1} = \phi(x_n) \quad \text{converge a } \xi \ \ (\xi = \phi(\xi)) \quad \text{con} \quad x_0 \in I$$

Allora:

- $\{x_n\}$ ha ordine esattamente $p = 1 \iff 0 < |\phi'(\xi)| < 1$
- $\{x_n\}$ ha ordine esattamente $p > 1 \iff \phi^{(j)}(\xi) = 0$ e $\phi^{(p)}(\xi) \neq 0$ con $1 \leq j \leq p-1$

Dimostrazione

1) si dimostra subito visto che

$$e_{n+1} = |\phi'(z_n)|e_n \quad \text{con } z_n \in (\xi, x_n)$$
$$\Downarrow$$

per il t. del val. medio avremo: $$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \left|\phi'(\lim_{n\to\infty} z_n)\right| = |\phi'(\xi)|$$

per 2) utilizziamo la formula di Taylor di grado $p-1$ centrata in ξ e calcolata in x_n, con il resto p-esimo in forma di Lagrange.

$$x_{n+1} = \phi(x_n) = \phi(\xi) + \phi'(\xi)(x_n - \xi) + \cdots + \frac{\phi^{(p-1)}(\xi)}{(p-1)!}(x_n-\xi)^{(p-1)} + \cancel{\frac{\phi^{(p-1)}(\xi)}{(p-1)!}} + \frac{\phi^{(p)}(u_n)}{p!}(x_n-\xi)^p$$

con $u_n \in (\xi, x_n)$

- **Dimostriamo "$\Leftarrow$" (condizione sufficiente)** (se valgono tutte le ipotesi di "ordine p > 1") allora:
  Da Taylor resta solo
  $$x_{n+1} - \xi = \frac{\phi^{(p)}(u_n)}{p!}(x_n - \xi)^p$$
  e passando ai moduli
  $$\frac{e_{n+1}}{e_n^p} = \frac{|\phi^{(p)}(u_n)|}{p!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{|\phi^{(p)}(\xi)|}{p!} \neq 0$$
  e_n^p ovvero per p, $\{x_n\}$ ha ordine esattamente p.

- **Dimostriamo "$\Rightarrow$" (condizione necessaria)**
  Per ipotesi $\{x_n\}$ ha esattamente ordine $p > 1$.
  Abbiamo per assurdo che $\exists\ j < p : \phi^{(j)}(\xi) \neq 0$, prendiamo $k = \min\{j < p : \phi^{(j)}(\xi) \neq 0\}$ e dal polinomio di Taylor iniziale si avrebbe:
  $$\frac{e_{n+1}}{e_n^k} \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \frac{|\phi^{(k)}(\xi)|}{k!} = L' \neq 0$$
  ma allora
  $$\frac{e_{n+1}}{e_n^p} = \frac{e_{n+1}}{e_n^k} \cdot e_n^{k-p}$$
  $$\left(\frac{e_{n+1}}{e_n^k} \to L' \text{ ed } e_n^{k-p} \to \infty \text{ perchè } k-p<0 \text{ ed } e_n \to 0\right)$$
  cioè
  $$\frac{e_{n+1}}{e_n^p} \to \infty, \quad n \to \infty$$
  contraddicendo l'ipotesi che $\{x_n\}$ abbia ordine esattamente p.

La condizione data è necessaria e sufficiente affinché le iterazioni di punto fisso abbiano ordine p >=1

Risponde alle domande:
Esistenza dell'interpolazione polinomiale - Perché esiste il pol. interpolatore
Unicità dell'interpolazione polinomiale - Perché il pol. interpolatore è unico
Esistenza ed unicità interpolazione polinomiale

8 Esistenza e unicità dell'interpolazione polinomiale

Unicità

Supponiamo che $\exists$ due polinomi $p, q \in \mathbb{P}_n$ (polinomi di grado $\leq n$), $p \neq q$, che interpolano $p(x_i) = y_i = q(x_i)$, con $0 \leq i \leq n \quad \rightarrow \quad n+1$ modi di interpolare.
Poiché $\mathbb{P}_n$ è uno spazio vettoriale $\quad \Rightarrow \quad p - q \in \mathbb{R}_n$.
Allora:

$$(p-q)(x_i) = p(x_i) - q(x_i) = 0, \quad \forall\ 0 \leq i \leq n$$

$$\underset{p-q \text{ ha } n+1 \text{ zeri distinti}}{\Downarrow}$$

Ma per il teorema fondamentale dell'algebra, $p - q$ può avere al massimo n zeri distinti, a meno che non sia il polinomio nullo

$$(p-q)(x) = 0 \quad \forall x \quad \Rightarrow \quad p(x) = q(x) \quad \forall x$$

Esistenza

Definiamo il "polinomio di Lagrange":

$$l_i(x) = \frac{N_i(x)}{N_i(x_i)}$$

dove

$$N_i(x) = \prod_{j=0,\ j\neq i}^{n} (x - x_j) = (x - x_0)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)$$

$l_i(x) \in \mathbb{P}_n$ poiché $N_i(x) \in \mathbb{P}_n$ e $N_i(x_i)$ è un numero $\neq 0$. (inoltre, l_i(x) ha grado effettivo n)
Osserviamo che:

(cosiddetto delta di Kronecker)

$$l_i(x_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{cases}$$

(N_i(x_k) contiene un fattore nullo che annulla il prodotto)
(vale 1 perché N_i(x_i) / N_i(x_i) = 1)

Definiamo il "polinomio interpolatore di Lagrange":

$$f_n(x) = \prod_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x) \quad \in \mathbb{P}_n$$

Verifichiamo che interpola

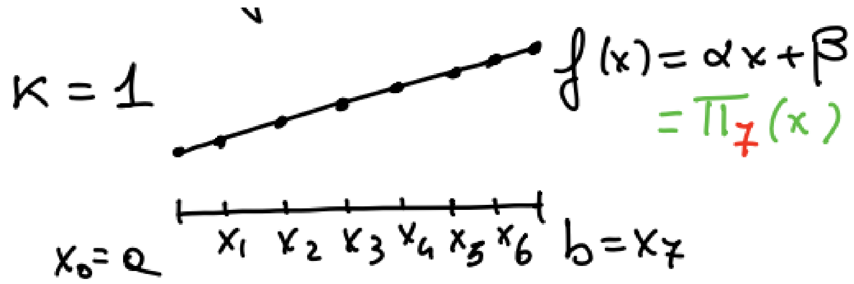
$$\begin{aligned} \prod_n(x_k) &= \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x_k) \\ &= \sum_{i=0}^{n} y_i \delta_{ik} \\ &= y_k\ \delta_{kk} \quad \longleftarrow \quad \text{perchè } \delta_{ik} = 0, i \neq k \\ &= y_k, \quad 0 \leq k \leq n \end{aligned}$$

Quanto scritto è il polinomio interpolatore su n+1 nodi distinti in forma di Lagrange.

Segue un appunto relativo al polinomio interpolatore; potrebbe esserci la seguente domanda specifica dell'unicità:

"Perché il polinomio interpolatore di grado $\leq n$ su $n+1$ nodi distinti è unico? Si faccia un esempio in cui ha grado $< n$"

L'esempio in questione è il seguente:



9 Convergenza uniforme dell'interpolazione lineare a tratti

Risponde alla domanda omonima

(a tratti significa che:
"Dato un intervallo [a, b] e sia a = t0 < t1 < . . . < tn = b
Una funzione f si dice polinomiale a tratti se la sua restrizione ad ogni intervallo [t_k ,t_(k+1)], k = 0, . . . , n 1 è un polinomio".
Lineare significa "trovare gli zeri di una funzione" (nodi rispetto alla funzione che interpola)

Teorema
Convergenza uniforme dell'interpolazione polinomiale a tratti.
Siano $f \in C^{s+1}[a,b]$, $s \geq 0$ e $\{x_i\} \subset [a,b]$ $n+1$ nodi distinti con n multiplo di s.
Allora

$$\exists k_s > 0: \; dist(f, \prod_s^c) \leq k_s \cdot h^{s+1}, \; h = max \; \Delta x_i$$

dist = distanza

Dimostrazione per $s = 1$.
Si ha che:

$$\begin{aligned} dist(f, \prod\nolimits_1^c) &= \max_{x \in [a,b]} |f(x) - \prod\nolimits_1^c(x)| \\ &= \max_{0 \leq i \leq n-1} \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} |f(x) - \prod\nolimits_1^c(x)| \end{aligned}$$

Ricordiamo la stima dell'errore di interpolazione polinomiale a grado s:

$$\max_{x \in [\alpha,\beta]} |f(x) - \prod\nolimits_s(x)| \leq \max_{x \in [\alpha,\beta]} |f^{(s+1)}(x)| \cdot \frac{h^{s+1}}{4(s+1)} \quad con \quad h = \frac{\beta - \alpha}{s}$$

Applichiamo al nostro caso: $s = 1, \quad [\alpha, \beta] = [x_{i-1}, x_i]$

$$\max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |f(x) - \prod\nolimits_{1,i}(x)| \leq \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |f''(x)| \cdot \frac{h^2}{8} = M_{2,i} \frac{h^2}{8}$$

con $M_2 = \max_{x \in [x_{x_i-1}, x_i]} |f''(x)|$ e $h = \Delta x_i$.
Da cui:

$$dist(f, \prod\nolimits_1^c) \leq \frac{M_2}{8} h^2$$

con $M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$

Un' equazione è in forma normale se al primo membro ha un solo termine contenente l' incognita e al secondo membro ha solo un termine noto. L' equazione in forma normale è del tipo ax=b, dove x è l' incognita, a è il coefficiente dell' incognita e b è il termine noto.

10 Stima delle equazioni normali per l'approssimazione polinomiale ai minimi quadrati

Risponde alla domanda omonima.

Dati N punti $\{(x_i, y_i)\}\ :\ y_i = f(x_i),\ 1 \le i \le N$ e $m < N$, il vettore $a \in \mathbb{R}^{m+1}$ minimizza $\phi(a) = \sum_{i=1}^{N}(y_i - \sum_{j=0}^{m} a_j \cdot x_i^j)^2 \iff$ risolve il sistema $V^tVa = V^ty$

Dimostrazione

Osserviamo le dimensioni degli elementi considerati

$$V \in \mathbb{R}^{N\times(m+1)}, \quad V^t \in \mathbb{R}^{(m+1)\times N}, \quad y \in \mathbb{R}^N, \quad a \in \mathbb{R}^{m+1}$$

Quindi per $m = 1$ non importa quanti dati N ci siano, il sistema sarà sempre 2×2 poiché ci saranno 2 coefficienti.

Dire che $a \in \mathbb{R}^{m+1}$ è di minimo (assoluto) per $\phi(a)$ significa:

$$\phi(a + b) \ge \phi(a) \quad \forall b \in \mathbb{R}^{m+1}$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned}
\phi(a + b) &= (y - V(a + b),\ y - V(a + b)) = (y - Va - Vb,\ y - Va - Vb) = \\
&= (y - Va,\ y - Va) + (y - Va,\ -Vb) + (-Vb,\ y - Va) + (-Vb,\ -Vb) = \\
&= \phi(a) + 2(Va - y,\ Vb) + (Vb,\ Vb) = \phi(a) + 2(V^t(Va - y),\ b) + (Vb,\ Vb)
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato le seguenti proprietà del prodotto scalare in $\mathbb{R}^m$ (per chiarezza indicato con $(u, v)_n$; ricordiamo che $(u, v)_n = u^tv$ interpretando i vettori come vettori-colonna):

1. $(u, v)_n = (v, u)_n \quad u, v, w \in \mathbb{R}^n$
2. $(\alpha u, v)_n = \alpha(u, v)_n \quad \alpha \in \mathbb{R}$
3. $(u + v, w)_n = (u, w)_n + (v, w)_n$
4. $(u, Az)_n = (A^tu, z)_k \quad u \in \mathbb{R}^n,\ z \in \mathbb{R}^k,\ A \in \mathbb{R}^{n\times k}$

Le proprietà sono:
commutativa, omogeneità, distributiva, trasposta.

In generale, non vale la proprietà associativa.

(la 4 serve per scrivere (V^t(Va - y), b)

Dimostriamo "$\Leftarrow$":
Se $V^tVa = V^ty$ allora:

$$V^tVa - V^ty = 0 \quad \iff \quad V^t(Va - y) = 0$$

Ma allora

$$\phi(a + b) = \phi(a) + \underbrace{(Vb,\ Vb)}_{\sum_{i=1}^{N}(Vb)_i^2 \ge 0} \ge \phi(a) \quad b \in \mathbb{R}^{m+1}$$

Dimostriamo "$\Rightarrow$":
Assumiamo che

$$\phi(a + b) \ge \phi(a) \quad \forall b \in \mathbb{R}^{m+1}$$

Allora:

$$\phi(a + b) = \phi(a) + 2(V^t(Va - y),\ b) + (Vb, Vb) \ge \phi(a) \quad \forall b$$

Cioè:

$$2(V^t(Va-y),\, b) + (Vb, Vb) \geq 0 \quad \forall b$$

Prendiamo $b = \varepsilon v$, con v versore (cioè vettore di lunghezza 1, $(v, v) = 1$). Si ha:

Versore = Vettore di modulo 1
(quindi, epsilon v * 1)

$$\begin{aligned} &2(V^t(Va-y),\, \varepsilon v) + (V(\varepsilon v),\, V(\varepsilon v)) \\ &= 2\varepsilon(V^t(Va-y),\, v) + \varepsilon^2(Vv, Vv) \geq 0 \quad \forall \varepsilon \geq 0 \text{ e } \forall v \end{aligned}$$

Dividendo per $\varepsilon > 0$:

$$2(V^t(Va-y),\, v) + \varepsilon(Vv, Vv) \geq 0 \quad \forall \varepsilon \text{ e } \forall v$$

Per $\varepsilon \to 0$ si ha:

$$(V^t(Va-y),\, v) \geq 0 \quad \forall v$$

Ma se vale $\forall$ versore, possiamo prendere $-v$:

$$(V^t(Va-y),\, -v) = -(V^t(Va-y),\, v) \geq 0 \quad \forall v$$

$$\Downarrow$$

$$(V^t(Va-y),\, v) \leq 0 \quad \forall v$$

Ma abbiamo che

$$0 \leq (V^t(Va-y),\, v) \leq 0 \iff (V^t(Va-y),\, v) = 0 \quad \forall v$$

L'unico vettore ortogonale a tutti i vettori è il vettore nullo. Quindi

$$V^t(Va-y) = 0 \iff V^tVa = V^tys$$

(quindi "a" è soluzione del sistema delle equazioni normali).

Risponde alle domande:
"Stima dell'errore relativo del sistema lineare in caso di perturbazione del vettore termine noto"
Altrimenti, normalmente, chiede tutta la dimostrazione, chiesta anche col nome:
"Condizionamento di matrici e sistemi lineari", che comunque intende tutta la dim.

11 Stime di condizionamento per un sistema lineare

In matematica, un sistema di equazioni lineari, anche detto sistema lineare, è un sistema composto da più equazioni lineari che devono essere verificate tutte contemporaneamente. Una soluzione del sistema è un vettore i cui elementi sono le soluzioni delle equazioni che compongono il sistema, ovvero tali che se sostituiti alle incognite rendono le equazioni delle identità.

(i) $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ (1° diseguaglianza fondamentale)

(ii) $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ (2° diseguaglianza fondamentale)

$\boxed{\text{Caso 1}}$ **perturbazione termine noto**

Sia

- $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ non singolare (matrice quadrata ed invertibile, quindi non singolare, quindi che ammette una sola soluzione)
- $x \in \mathbb{R}^n$ soluzione del sistema $Ax = b$ con $b \neq 0$
- $\tilde{x} = x + \delta x$ soluzione del sistema $A\tilde{x} = \tilde{b}$ con $\tilde{b} = b + \delta b$

Fissata una norma vettoriale $\|\cdot\|$ in $\mathbb{R}^n$, vale la seguente stima dell'errore relativo su x

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \cancel{K}(A)\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \quad \text{con} \quad k(A) \underset{indice\ di\ condiz.}{=} \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

k(A) e non K(A)

Dimostrazione

Osserviamo che $x = A^{-1}b \neq 0$ quindi ha senso studiare l'errore relativo (dividere per $\|x\|$).
Si ha

$$\begin{cases} \tilde{x} = x + \delta x \\ \tilde{x} = A^{-1}\tilde{b} = A^{-1}(b + \delta b) = \underbrace{A^{-1}b}_{=x} + A^{-1}\delta b \end{cases} \Rightarrow \quad \|\delta x\| = \|A^{-1}\delta b\| \underset{1^o dis.fond.}{\leq} \|A^{-1}\| \cdot \|\delta b\|$$

Per stimare $\frac{1}{\|x\|}$ da sopra, cioè da sotto $\|x\|$.

$$\|b\| = \|Ax\| \underset{1^o dis.fond.}{\leq} \|A\| \cdot \|x\|$$

da cui

$$\|x\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|}$$

e

$$\frac{1}{\|x\|} \leq \frac{\|A\|}{\|b\|}$$

perciò

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|\delta b\|}{\|x\|} \leq \|A^{-1}\| \cdot \|A\| \cdot \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} = k(A) \cdot \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

$\boxed{\text{Caso 2}}$ **perturbazione matrice**

Nota --> ~x nel rapporto qui del caso (2) non è un errore, anzi, è corretto.
Si guardino gli Appunti di Calcolo in LaTeX su Mega per averne conferma.

Siano fatte le stesse ipotesi del caso 1, ma con $\tilde{A}\tilde{x} = b$, $\tilde{A} = A + \delta A$.
Vale la stima dell' "errore relativo" su x

$$\frac{\|\delta_x\|}{\|\tilde{x}\|} \leq k(A) \cdot \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

Dimostrazione

$$\begin{cases} \tilde{A}\tilde{x} = (A + \delta A)(x + \delta x) \\ \quad = Ax + A\delta x + \delta A\tilde{x} \\ \quad = b + A\delta x + \delta A\tilde{x} \\ \tilde{A}\tilde{x} = b \end{cases} \Rightarrow \quad A\delta x + \delta A\tilde{x} = 0 \iff \delta x = -A^{-1}(\delta A\tilde{x})$$

Quindi

$$\|\delta x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\delta A \tilde{x}\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\| \cdot \|\tilde{x}\|$$

e perciò

$$\frac{\|\delta x\|}{\|\tilde{x}\|} \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\| = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} = k(A) \cdot \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

$\boxed{\textbf{Caso 3}}$ **perturbazione termine noto e matrice**

(Negli appunti, questo caso (3) appare con il nome "Caso generale perturbazioni") -> Basta mettere questo pezzo che si vede qua sotto, la dim. del perché si ottiene questo è facoltativa.

Stesse ipotesi degli altri casi ma con $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$.
Si ha che se $k(A) \cdot \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} < 1$ allora:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{k(A)}{1 - k(A) \cdot \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \cdot \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}\right)$$

Dimostrazioni chieste poco e fuori dal syllabus:
da vedere lo stesso.
Consigliate: Rapp. incrementale simmetrico e trapezi

Ogni matrice simmetrica semidefinita positiva ha tutti gli autovalori non negativi.
Per trovare gli autovalori, si deve costruire la matrice identità, trovare il determinante, costruire il polinomio caratteristico e i suoi valori di lambda (scalari) * i vettori (non nulli) a cui sono moltiplicati, danno gli autovalori (vale per le matrici quadrate di ordine n).

Sistema delle equazioni normali per approssimazione lineare

Questa è anche nota come retta dei minimi quadrati

Sapendo che dati N punti $\{(x_i, y_i)\}$, $y_i = f(x_i)$, $1 \le i \le N$ e $m < N$, sse il vettore $a \in \mathbb{R}^{m+1}$ minimizza $\phi(a) = \sum_{i=1}^{N} (y_i - \sum_{j=0}^{m} a_j \cdot x_i^j)^2$ allora risolve i sistema $V^t V a = V^t y$, si possono usare le proprietà di $V^t V$ per trovare il sistema relativo alla retta dei minimi quadrati. $V^t V$ è una matrice simmetrica e semidefinita positiva. Inoltre $(Vv, Vv) = 0 \Longleftrightarrow Vv = 0$ e $(Vv, Vv) = (V^t Vv, v)$ quindi $v = 0$ se V ha rango max cioè se ha almeno $m+1$ punti distinti tra i nodi di campionamento. Si ricava quindi una matrice V t.c.

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^m \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_{m+1} & x_{m+1}^2 & \dots & x_{m+1}^m \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_N & x_N^2 & \dots & x_N^m \end{pmatrix}$$

La sottomatrice $V \in \mathbb{R}^{(m+1)(m+1)}$ è matrice di Vandermonde per l'interpolazione di grado $\le m$ su $m+1$ nodi distinti, quindi è non singolare.

Questo evidenzia che, quindi, il rango della sottomatrice è $m+1$ e che le intere colonne $m+1$ di V sono linearmente indipendenti come vettori di $\mathbb{R}^N$. Quindi si possono calcolare gli elementi della matrice $V^t V$ e del vettore noto $V^t y$, con $m = 1$

$$V^t V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

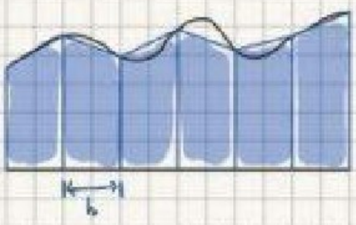
$$V^t y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & x_N \\ x_1 & x_2 & \dots & x_N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

quindi il sistema è: $\begin{pmatrix} N & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{pmatrix}$

Errore formula trapezi

La formula dei trapezi utilizza l'interpolazione lineare a tratti, imponendo $s = 1$ l'integrale viene approssimato alla somma delle aree dei trapezi lineari. L'i-esimo trapezio ha altezza $h = \frac{b-a}{n}$ e basi $f(x_{n-1})$ e $f(x_n)$ con $1 \leq i \leq n$, avendo quindi l'area $A = \frac{h}{2}(f(x_{n-1}) + f(x_n))$ quindi:

$h/2\big(f(x_0) + f(x_n)\big) + \sum_{i=1}^{n-1} hf(x_{\mathrm{i}})$ con $w_i = \frac{h}{2}\ se\ i = 0, i = n, w_i = h\ se\ 1 \leq i \leq n-1$



$I_n^{trap}(f) = I(\Pi_1^c) = \sum$ (aree trapezi lineari)

Per ricavare una stima dell'errore possiamo usare la stima $|I(f) - I_n(f)| = |I(f) - I(f_n)| \leq |I(f - f_n)| \leq (b-a)\,dist(f, f_n)$. Se dist $\to 0$ allora ci sarà convergenza, altrimenti potrebbero presentarsi problemi di divergenza. Per quanto riguarda le formule di quadrature composte ottenute come $I_n(f) = I(\Pi_s^c)$, con n multiplo di s: $|I(f) - I_n(f)| \leq (b-a)\,dist(f, \Pi_s^c) \leq (b-a) K_s \cdot h^{s+1}$ se $f \in C^{s+1}[a,b]$ con $h = \max \Delta x_i$. Quindi per qualsiasi distribuzione dei nodi per cui $h \to 0$ se $f \in C^{s+1}[a,b]$ le formule sono sempre convergenti con un errore proporzionale a h^{s+1}, ma $s = 1$ per i trapezi quindi per $f \in C^2$ sarà convergente con un errore $O(h^2)$.

Domande presenti nel Moodle 21-22 a cui ho risposto precisamente:
Questa e le prossime 2 non sono mai state chieste.
Presenti per sicurezza.

Costo computazionale del metodo di eliminazione di Gauss

Il costo computazionale del meg è dato dall'analisi tra ciclo interno, composto da n moltiplicazioni ed n somme,scritto come segue:

$$
\begin{aligned}
c_n^{meg} &\sim \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^{n} 2n \\
&= 2n \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) \\
&\underset{j=n-i}{=} 2n \sum_{j=1}^{n-1} j \\
&= 2n \cdot \frac{n(n-1)}{2} \\
&= n^3 - n^2 \sim n^3, \quad n \to \infty
\end{aligned}
$$

Vedendo però che le operazioni vettoriali non ha senso farle sui vettori riga, le facciamo solo sul segmento di vettori con indici da i + 1 ad n, verificando che otteniamo:

$$
\begin{aligned}
c_n^{meg} &\sim \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^{n} 2(n-i) \\
&= 2 \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)^2 \\
&\underset{j=n-i}{=} 2 \sum_{j=1}^{n-1} j^2 \sim \frac{2}{3} n^3
\end{aligned}
$$

Ottenendo infine:

$$
\frac{(n-1)^3}{3} < \sum_{j=1}^{n-1} j^2 < \frac{n^3}{3} - 1
$$

Fattorizzazione QR per la soluzione di sistemi lineari sovradeterminati

Sia $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$ tale che $rango(A) = n$
Allora $\exists Q \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ortogonale (cioè $Q^t Q = I$) e $\exists R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tringolare superiore con $det(R) \neq 0$ tali che

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = QR = \begin{pmatrix} q_{11} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & \dots & q_{2n} \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ q_{m1} & \dots & q_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & \dots & r_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & r_{nn} \end{pmatrix}
$$

Q^t è ortogonale, cioè $Q^tQ = I$, in particolare Q^t ha per righe le colonne di Q, quindi:
Il prodotto riga-i x colonna-j = prodotto scalare = delta di Kronecker
Ciò implica che le colonne di Q, quindi sono vettori *ortonormali* di R^m.
Siccome R è invertibile → $QRR^{-1} = Q = AR^{-1}$ e l'inversa di una matrice triangolare è triangolare dello stesso tipo.

Il prodotto di A per le colonne di R^{-1} permette di ottenere come combinazione lineare delle prime *j* colonne di A e, grazie a Q ortogonale, le colonne si ortonormalizzano → Algoritmo di Gram-Schimdt.

Sia $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$, $rango(A) = n$. Fattorizzando $A = QR$, si ha che

$$A^tA = (QR)^tQR = R^tQ^tQR = R^tIR = R^tR$$

e

$$A^tb = R^tQ^tb$$

quindi il sistema $A^tAx = A^tb$ diventa

$$R^tRx = R^tQ^tb$$

ma essendo R (e quindi R^t) invertibile

$$(R^t)^{-1}R^tRx = Rx = (R^t)^{-1}R^tQ^tb = Q^tb$$

cioè il sistema $A^tAx = A^tb$ equivale al sistema triang. sup.

$$Rx = d = Q^tb$$

che si può facilmente risolvere con la sostituzione all'indietro.

Computazionalmente parlando, è leggermente migliore LU; tuttavia, dal punto di vista della stabilità, QR è decisamente migliore.

La domanda del prof è molto vaga: io ho messo l'ordine di stabilità e l'errore, oltre alla definizione.
Se si riesce a mettere anche la convergenza, meglio (la cui formula si usa sopra nei trapezi ed è una riga).

<u>Formule di quadratura composte</u>

Per $f_n(x) = \prod_s^c(x)$ cioè, la funzione polinomiale composta a tratti di grado locale *s* (con *n* multiplo di *s*,

si ottengono le *formule composte*. Nel caso delle formule, i nodi *n = k * s* sono a pacchetti di s+1 con nodo di raccordo. Ciascun valore di interpolazione locale y_i compare una volta tranne per i nodi di raccordo (dove compare due volte e i 2 pesi vanno sommati), quindi ottenendo:

$$I_n(f) = I(\textstyle\prod_s^c) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} w_i \cdot y_i$$

sommando a coppie i nodi:

$$w_i = w_{i,j} + w_{i,(j+1)}$$

Per le formule di quadratura composte ci riconduciamo a due casi, facendo riferimento nel caso di calcolo di nodi equispaziati:

- Per s = 1 alla formula dei trapezi, in cui l'integrale viene approssimato alla somma delle aree dei trapezi lineari corrispondenti all'interpolazione lineare a tratti.

$$\begin{aligned}
I_n^{trap}(f) &= I(\textstyle\prod_1^c) \\
&= \int_a^b \textstyle\prod_1^c(x)dx \\
&= \textstyle\sum(\text{aree trapezi}) \\
&= \overbrace{\frac{h}{2}\cdot(f(x_0)+f(x_1))}^{\text{area trapezio 1}} + \overbrace{\frac{h}{2}\cdot(f(x_1)+f(x_2))}^{\text{area trapezio 2}} + \ldots + \\
&+ \underbrace{\frac{h}{2}\cdot(f(x_{n-2})+f(x_{n-1}))}_{\text{area trapezio (n-1)-esimo}} + \underbrace{\frac{h}{2}\cdot(f(x_{n-1})+f(x_n))}_{\text{area trapezio n-esimo}} \\
&= \frac{h}{2}(f(x_0)+f(x_n)) + \sum_{i=1}^{n-1} h\cdot f(x_i)
\end{aligned}$$

$$I_n(f) = \sum_{i=0}^{n} w_i \cdot f(x_i), \text{ con } w_i = \begin{cases} \frac{h}{2}, & i = 0, n \\ h, & 1 \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

- Per s = 2, integrando la funzione quadratica a tratti, si ottiene la formula delle parabole:

$$I_n^{parab}(f) = I\left(\prod_2^c\right) = \sum(\text{aree trapezi parabolici}) = \sum_{i=0}^{n} w_i \cdot f(x_i), \text{ con } w_i =$$

$$\begin{cases} h/3, & i = 0, n \text{ pari} \\ 4h/3, & i \text{ dispari} \\ 2h/3, & i \text{ pari } 2 \le i \le n-2 \end{cases}$$

$$\int_\alpha^\beta \prod_2(x)dx = \frac{h}{3} \cdot f(\alpha) + \frac{4}{3} \cdot h \cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \frac{h}{3} \cdot f(\beta)$$

Da aggiungere che, per le formule composte, ottenute come In(f) = (Π_s^c) con *n* multiplo di *s*, abbiamo:

$$|I(f) - I_n(f)| \le (b-a) \cdot dist(f, \prod_s^c) \le (b-a)k_s \cdot h^{s+1} \quad \text{se } f \in C^{s+1}[a,b] \quad \text{con } h = max\ \Delta x_i.$$

Essendo le formule sempre convergenti per qualsiasi distribuzione di nodi per cui *h* → 0, avremo che:

- la formula dei trapezi, per s=1, presenta un errore $O(h^2)$
- la formula delle parabole, per s=2, presenta un errore $O(h^3)$ (può anche valere, nel caso di nodi equispaziati per simmetria, $O(h^4)$

Questa è la più chiesta tra quelle fuori dal syllabus; completa e risponde a tutti i punti.

Rapporto incrementale simmetrico

Assumiamo ora che $f \in C^3(I_r)$ e scriviamo la formula di Taylor "da destra" e "da sinistra" (centrandola sempre in x, con passo $0 < h \leq r$).

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(\xi)$$
$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(\eta)$$

dove $\xi \in (x,\, x+h)$ e $\eta \in (x-h,\, x)$ da cui si ottiene, sottraendo membro a membro

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + O(h^3)$$

e anche

$$\delta(h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x) + O(h^2)$$

(sottraendo si elidono i termini di grado pari in h), con

$$\begin{aligned} |f'(x) - \delta(h)| &= \frac{1}{12} \cdot |f'''(\xi) + f'''(\eta)| \cdot h^2 \\ &\leq \frac{1}{12}\left(|f'''(\xi)| + |f'''(\eta)|\right) \cdot h^2 \\ &\leq d \cdot h^2 \end{aligned}$$

dove $d = \frac{1}{6} \max_{t \in I_r} |f'''(t)|$.

Questo mostra che l'errore è $O(h^2)$ per $f \in C^3(I_r)$.

Dobbiamo, però, occuparci della risposta dell'algoritmo agli errori su *f*, assumendo $|\tilde{f}(t) - f(t)| \leq \varepsilon$

Dobbiamo quindi stimare $|\delta(h) - \tilde{\delta}(h)|$, con

$$\tilde{\delta}(h) = \frac{\tilde{f}(x+h) - \tilde{f}(x-h)}{2h}$$

(rapporto incrementale simmetrico "perturbato"), vista la stima

$$\begin{aligned} |f'(x) - \tilde{\delta}(h)| &= |f'(x) - \delta(h) + \delta(h) - \tilde{\delta}(h)| \\ &\leq \underbrace{|f'(x) - \delta(h)|}_{\text{convergenza}} + \underbrace{|\delta(h) - \tilde{\delta}(h)|}_{\text{stabilità}} \end{aligned}$$

Ora

$$\begin{aligned} |\delta(h) - \tilde{\delta}(h)| &= \frac{1}{2h}|f(x+h) - f(x-h)| - |\tilde{f}(x+h) - \tilde{f}(x-h)| \\ &= \frac{1}{2h}|(f(x+h) - \tilde{f}(x+h)) + (\tilde{f}(x-h) - f(x-h))| \\ &\leq \frac{1}{2h}(|f(x+h) - \tilde{f}(x+h)| + |\tilde{f}(x-h) - f(x-h)|) \\ &\leq \frac{1}{2h}(\varepsilon + \varepsilon) = \frac{2\varepsilon}{2h} = \frac{\varepsilon}{h} \end{aligned}$$

Otteniamo quindi

$$|f'(x) - \tilde{\delta}(h)| \leq dh^2 + \frac{\varepsilon}{h} = E(h)$$

La stima è simile a quella del rapporto incrementale standard, ma l'esponente di h è 2, pertanto per rendere piccolo *dh*^{2} basta avere un passopiù grande rispetto a quello che serve per *ch*.
Come prima, cerchiamo di minimizzare:

$$E(h) = dh^2 + \frac{\varepsilon}{h} \qquad E'(h) = 2dh - \frac{\varepsilon}{h^2} = 0 \Rightarrow h^3 = \frac{\varepsilon}{2d}$$

$$\Rightarrow h^* = h^*(\varepsilon) = \left(\frac{\varepsilon}{2d}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Con E(h) convessa ed h* di minimo. D'altra parte:

$$E(h^*) = d(h^*)^2 + \frac{\varepsilon}{h^*} = d^{1/3} \cdot (2^{-2/3} + 2^{1/3}) \cdot \varepsilon^{2/3}$$

cioè:

$$h^* = O(\varepsilon^{1/3}) \quad \text{e} \quad E(h^*) = O(\varepsilon^{2/3})$$

Rispetto al rapporto incrementale standard, per ε piccolo, l'errore minimale $E_+(h^*)$ è $\varepsilon^{2/3} << \varepsilon^{1/2}$.

Chiesta una volta: molto similare al simmetrico, si ricordino definizioni e logica della derivazione.

<u>Derivazione numerica rapporto incrementale "classico" / Rapporto incrementale standard</u>

Consideriamo il calcolo di f' in un intorno di valori campionati assumendo f ∈ $C^2(I_r)$ e usando il rapporto incrementale destro:

$$I_r = I_r(x) = [x - r, x + r]$$

$$\delta_+(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad 0 < h \leq r$$

Dalla definizione di derivabilità in *x*, è convergente:

$$\lim_{h \to 0} \delta_+(h) = f'(x)$$

La stima dell'errore, dunque, è data usando la formula di Taylor centrata in *x* e con incremento *h*:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(z) \qquad \text{dove } z \in (x, x+h). \text{ Allora}$$

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(z)$$

cioè

$$\delta_+(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + O(h)$$

nel senso che $\exists c > 0$ tale che

$$|\delta_+(h) - f'(x)| \leq ch, \qquad c = \frac{1}{2} \max_{t \in I_r} |f''(t)| \geq \frac{|f''(z)|}{2}$$

La convergenza del rapporto incrementale δ+(h) è lenta ma, per presenza di errori, vogliamo solo saper stimare i valori approssimati ~f(t) come segue:

$$|f(t) - \tilde{f}(t)| \leq \varepsilon \ \forall t \in I_r$$

Chiamiamo allora $\tilde{\delta}_+(h)$ il rapporto incrementale "perturbato"

$$\tilde{\delta}_+(h) = \frac{\tilde{f}(x+h) - \tilde{f}(x)}{h}$$

Possiamo scrivere

$$\begin{aligned} |f'(x) - \tilde{\delta}_+(h)| &= |f'(x) - \delta_+(h) + \delta_+(h) - \tilde{\delta}_+(h)| \\ &\leq \underbrace{|f'(x) - \delta_+(h)|}_{\text{convergenza}} + \underbrace{|\delta_+(h) - \tilde{\delta}_+(h)|}_{\text{stabilità}} \quad \longleftarrow \text{diseg. triangolare} \end{aligned}$$

Per l'analisi della stabilità:

$$\begin{aligned} |\delta_+(h) - \tilde{\delta}_+(h)| &= \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{\tilde{f}(x+h) - \tilde{f}(x)}{h} \right| \\ &= \left| \frac{f(x+h) - \tilde{f}(x+h)}{h} + \frac{\tilde{f}(x) - f(x)}{h} \right| \\ &\leq \frac{1}{h} \left| f(x+h) - \tilde{f}(x+h) \right| + \frac{1}{h} \left| \tilde{f}(x) - f(x) \right| \quad \longleftarrow \text{diseg. triangolare} \\ &\leq \frac{1}{h}\varepsilon + \frac{1}{h}\varepsilon = \frac{2\varepsilon}{h} \end{aligned}$$

Da cui:-

$$\left| f'(x) - \tilde{\delta}_+(h) \right| \leq ch + \frac{2\varepsilon}{h} = E_+(h)$$

avendo quindi che l'errore è $O(\varepsilon^{1/2})$.

Si conclude che si hanno due esigenze contrastanti:

- Serve *h* piccolo per la convergenza teorica
- Per ε fissato, prendere h → 0 *amplifica l'errore su f*

Questa, dunque, l'instabilità che si eredita dalla derivazione.